Trouver les réels x, y, z qui vérifient simultanément les trois équations suivantes :

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z} = 5,\ \frac{z(y+x)}{x+y+z} = 3,\ \frac{y(x+z)}{x+y+z} = 4$$

————————————

Solution :

[0] [usye0001] Dany-Jack Mercier

1) Résoudre le système (I) dans $\mathbb{R}$:

$$(I)\begin{cases}\dfrac{x(y+z)}{x+y+z}=5\\[2mm]\dfrac{z(y+x)}{x+y+z}=3\\[2mm]\dfrac{y(x+z)}{x+y+z}=4\end{cases}$$

On aura nécessairement :

$$(1)\quad x+y+z=\frac{x(y+z)}{5}=\frac{z(x+y)}{3}=\frac{y(x+z)}{4}$$

d'où

$$\begin{cases}3xy+3xz=5xz+5yz\\3xy+3yz=4zx+4zy\end{cases}\iff\begin{cases}3xy-2xz-5yz=0 & \times 1\\3xy-4xz-yz=0 & \times(-1)\end{cases}$$

$$2xz-4yz=0$$

$$xz-2yz=0$$

$$\boxed{z(x-2y)=0 \quad (2)}$$

De 2 choses l'une :

1°/ $\underline{z=0}$ alors $3xy=0$ d'où $x=0$ ou $y=0$

α) $\underline{\text{Si } x=0}$, dans (1) $x+y+z=0 \Rightarrow y=0$, absurde

β) $\underline{\text{Si } y=0}$, " " $\Rightarrow x=0$ absurde.

2°/ $\underline{\text{Donc } z\neq 0\text{, et alors } (2)\iff}$ $\boxed{x=2y}$

Reportons $x=2y$ dans (I) :

$$(II)\begin{cases}2y^2+2yz=15y+5z & (3)\\yz=3y+z & (4)\\2y^2+yz=12y+4z & (5)\end{cases}$$

Reportons (4) dans (3) et (5), on obtient :

$$\begin{cases}2y^2+6y+2z=15y+5z & (3')\\2y^2=9y+3z & (5')\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y^2=9y+3z\\2y^2=9y+3z\end{cases}\iff 2y^2=9y+3z$$

Ainsi $(II)\iff\begin{cases}yz=3y+z\\2y^2=9y+3z\end{cases}\quad (III)$

$(III) \Rightarrow 2y^2 = 3yz \Leftrightarrow y(2y-3z)=0$

Faisons donc 2 sous-cas :

α) <u>Si $y=0$</u>, $x=2y \Rightarrow x=0$ donc $z=0$ ce qui est absurde

β) <u>Si $2y=3z$</u> $\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}z$

Alors $(III) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}z^2 = \frac{9}{2}z + z \\ \frac{9}{2}z^2 = \frac{27}{2}z + 3z \end{cases} \Leftrightarrow 3z = 11 \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{11}{3}}$

d'où $\boxed{y = \frac{11}{2}}$

et $\boxed{x = 11}$

Inversement, on vérifie que ces valeurs conviennent.

<u>Ccl</u> : Le seul triplet solution est $\boxed{(x,y,z) = \left(11, \frac{11}{2}, \frac{11}{3}\right)}$

Matrice de changement de base dans un A-module.

Soient A un anneau commutatif et E un A-module libre de type fini. Cela signifie qu'il existe une base finie $e = (e_1, ..., e_n)$ de E. Soient n vecteurs $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Démontrer l'équivalence entre

i) $(f_1, ..., f_n)$ est une base de E,

ii) La matrice $P = (a_{ij})$ est inversible (en tant que matrice à coefficients dans l'anneau A).

Solution :

[0] [usye0002] Dany-Jack Mercier

Soient A un anneau commutatif et E un A-module. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On se donne un système $(f_1, \ldots, f_n)$ de n vecteurs $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, et l'on définit la matrice $P = (a_{ij})$.

Montrer l'Equivalence entre :

i) $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E,

ii) P est inversible (en tant que matrice à coeff. dans l'anneau A)

preuve :

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \text{ libre} \iff \left(\sum_j \alpha_j f_j = 0 \Rightarrow \forall j\ \alpha_j = 0 \right)$$

$$\iff \left(\sum_j \sum_i \alpha_j a_{ij} e_i = 0 \Rightarrow \forall j\ \alpha_j = 0 \right)$$

$$\iff \left(\forall i\ \sum_j a_{ij} \alpha_j = 0 \Rightarrow \forall j\ \alpha_j = 0 \right)$$

$$\iff \left(P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \right)$$

$$\iff \operatorname{Ker} P = \{0\} \qquad (1)$$

$$\iff P \text{ injective}$$

$$f \text{ générateur} \iff \forall x \in E\ \exists x'_j \in A \quad x = \sum_{j=1}^{n} x'_j f_j$$

$$\iff \forall x_{1}, \ldots, x_n \in A\ \exists x'_j \in A \quad x = \sum_j x'_j \sum_i a_{ij} e_i = \sum_i x_i e_i$$

$$\iff \forall x_i\ \exists x'_j\ \forall i \quad \sum_j a_{ij} x'_j = x_i$$

$$\iff \forall x_i\ \exists x'_j \quad P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\iff P \text{ surjective}$$

Cela étant :

~~(ii) ⇒ (ii)~~

~~(ii) ⇒ (i) : si P inversible, (1) et (2) sont triviales !~~

~~(i) ⇒ (ii) : si (1) et (2) sont vraies, il existera (cf (2)) des vecteurs-colonnes $c_1, \dots, c_n$ tq~~

$$P c_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ j ième place}$$

~~En notant $[c_1, \dots, c_n]$ la matrice carrée de colonnes c_j, on trouve :~~

$$P.[c_1, \dots, c_n] = I$$

~~donc P est inversible (dans A). □~~

~~(i) ⇒ (ii) Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base, cela équivaut à (1) et (2)~~

(ii) ⟺ P inversible

⟺ ∃ Q mati $PQ = QP = I$

⟺ P bijective (en tant "qu'application linéaire")

⟺ P surjective et P injective

⟺ $(f_1, \dots, f_n)$ base de E (d'après les équivalences précédentes)

⟺ (i)

Méthode du pivot de Gauss :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Chercher le rang de M et résoudre le système $M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ -3x + 7y - 3z = 1 \end{cases} \qquad (I)$$

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ \quad -7y - 8z = -1 \\ 3l_1 + 4l_3 \quad 25y - 6z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ \quad 7y + 8z = 1 \\ 25l_2 + 7l_3 \quad -242z = 66 \end{cases} \qquad (II)$$

Les systèmes ci-dessus sont équivalents et (II) montre que M est de rang 3. On obtient :

$$\begin{cases} z = \dfrac{66}{-242} = \dfrac{-3}{11} \\ y = \dfrac{1}{7}(1 - 8z) = \dfrac{5}{11} \\ x = \dfrac{1}{4}(3 + y - 2z) = 1 \end{cases}$$

Ccl : $\boxed{(x, y, z) = \left(1, \dfrac{5}{11}, -\dfrac{3}{11}\right)}$

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes :

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x+4y-z=3 \\ 5y+3z=7 \\ x-2y+z=-8 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre.

Solution :

[0] [usy10002] Dany-Jack Mercier

[usyl0002]

a) Résoudre par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ 5y + 3z = 7 \\ x - 2y + z = -8 \end{cases} \quad (I)$$

On obtient les systèmes équivalents :

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ 5y + 3z = 7 \\ -8y + 3z = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ 3z + 5y = 7 \\ 13y = 26 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = \frac{1}{3}(7 - 5y) = -1 \\ x = \frac{1}{2}(3 + z - 4y) = -3 \end{cases}$$

[usyl0002]

b) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

λ paramètre

Méthode du pivot de gauss : le système équivaut à :

$$(I) \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ (\lambda^2 - 1) y + (\lambda - 1) z = \lambda^2 - 1 \\ (\lambda - 1) y + (\lambda^2 - 1) z = \lambda^3 - 1 \end{cases}$$

* Si $\lambda = 1$, $(I) \Leftrightarrow \quad x + y + z = 1$

On obtient un plan affine de solutions.

* Si $\lambda \neq 1$, (I) est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ (\lambda + 1) y + z = \lambda + 1 \\ y + (\lambda + 1) z = \lambda^2 + \lambda + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 & (1) \\ (\lambda + 1) y + z = \lambda + 1 & (2) \\ \lambda (\lambda + 2) z = \lambda (\lambda + 1)^2 & (3) \end{cases}$$

D'où la discussion :

a) Si $\lambda = 0$, $(I) \Leftrightarrow \left(y + z = 1 \right.$, et S est un plan affine.

b) Si $\lambda = -2$, (3) devient $0 = -2$. Il n'y a donc pas de solutions !

c) Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -2$,

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ (\lambda + 1) y + z = \lambda + 1 \\ z = \dfrac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2} \end{cases}$$

On trouve : $(\lambda+1)y = \lambda+1 - \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \Rightarrow (\lambda+1)y = (\lambda+1)\frac{1}{\lambda+2}$

α) <u>Si $\lambda=-1$</u>, (I) équivaut à :

$$\begin{cases} -x+y+z=1 \\ z=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}=0 \end{cases}$$ c'est une dte affine.

β) <u>Si $\lambda\neq-1$</u>, (I) équivaut à :

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ y=\dfrac{1}{\lambda+2} \\ z=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}$$

d'où $\lambda x = 1-y-z = 1-\frac{1}{\lambda+2}-\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} = \frac{\lambda+2-1-(\lambda^2+2\lambda+1)}{\lambda+2}$

$$\lambda x = \frac{-\lambda^2-\lambda}{\lambda+2}$$

~~i) Si $\lambda=0$, (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{\lambda+2}=\frac{1}{2} \\ z=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}=\frac{1}{2} \end{cases}$ c'est une dte affine.~~

~~ii) Si $\lambda\neq0$, (I) $\Leftrightarrow \{ x=-\frac{\lambda+1}{}$~~

Ici, $\lambda\neq0$, donc

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ y=\dfrac{1}{\lambda+2} \\ z=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}$$

et le système est de Cramer.